CONCURSUL INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia I, BECLEAN 24-26 mai 2013

SUBIECTE CLASA a VIII-a

1) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$3x^2 - 2xy - y - 1 = 0.$$

G.M. /2012.

2) Să se arate că:

$$E=\frac{(2014^4+2014^2+1)(2012^4+2012^2+1)(2010^4+2010^2+1)......(4^4+4^2+1)(2^4+2^2+1)}{(2013^4+2013^2+1)(2011^4+2011^2+1)(2009^4+2009^2+1).....(3^4+3^2+1)}\in N.$$

3) Se consideră *ABCD* un tetraedru şi *PQRS* un paralelogram astfel încât $P\in(AB)$, $Q\in(AC)$, $R\in(CD)$ şi $S\in(BD)$. Fie *M* şi *N* mijloacele muchiilor *BC*, respectiv *AD* şi $PR \cap SQ = \{O\}$. Demonstraţi că punctele *M,O,N* sunt coliniare.

Notă:

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

Succes !

CONCURSUL INTERNAȚIONAL DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia I, BECLEAN 24-26 mai 2013

Barem de evaluare și notare clasa a VIII-a

Subiectul 1.

y=$\frac{3x^2-1}{2x+1} \Rightarrow$ 1p

2x+1|2(3x^2-1), 2x+1|3x(2x+1) $\Rightarrow$ 2x+1|3x+2 $\Rightarrow$

2x+1|2(3x+2)-3(2x+1)$\Rightarrow$2x+1|1$\Rightarrow$ 2p

2x+1=1 sau 2x+1 = −1 $\Rightarrow$ 2p

x=0, y= −1 şi x = −1, y = −2. 2p

Subiectul 2.

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 2p

$(x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + x + 1$ 2p

şi prin simplificare E=3(2014^2+2014+1)$\in$N 3p

Subiectul 3.

PQ || SR $\Rightarrow$ (din teorema acoperişului) PQ || SR || BC 1p

Fie M'=AM∩PQ si M''=DM∩SR

Cum AM, respectiv MD, sunt mediane $\Rightarrow$ M', respectiv M'', mijloacele

lui [PQ], respectiv [SR] $\Rightarrow$ 2p

M'M'' segmentul care unește mijloacele a doua laturi opuse în

paralelogramul PQRS $\Rightarrow$ mijlocul lui [M'M''] este O 1p

QR || PS$\Rightarrow$ (din teorema acoperişului) că AD || RQ $\Rightarrow$ AD || (PQRS) $\Rightarrow$ 1p

(folosind teorema fierăstrăului) că M'M'' || AD 1p

Dar, în ΔMAD, MN – mediană $\Rightarrow$

MN trece prin mijlocul lui M'M'', adică O. 1p